

## Beispielaufgabe für Kurvendiskussion bei gebrochen rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

### 1.) Definitionsbereich

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

### 2.) Symmetrie

$$f(-x) = \frac{(-x)-1}{(-x)^2} = \frac{-x-1}{x^2} \neq f(x) \Rightarrow \text{Keine Achsensymmetrie zur y-Achse Symmetrie}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)-1}{(-x)^2} = \frac{-x-1}{x^2} \neq -\frac{x-1}{x^2} \Rightarrow \text{Keine Punktsymmetrie zum Ursprung}$$

### 3.) Polstellen

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ Polstelle bei } x = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

### 4.) Waagrechte Asymptote

Da Grad des Zählers < Grad des Nenners gilt: Waagrechte Asymptote bei  $y = 0$

### 5.) Nullstellen

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad N(1 \mid 0)$$

### 6.) Ableitungen

(In der Regel: Alle drei Ableitungen berechnen

Ausnahmen: An der zweiten Ableitung ist erkennbar, dass es keinen Wendepunkt geben kann.

In der Aufgabenstellung sind nur zwei Ableitungen gefordert.)

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1x^2 - (x-1)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - (2x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{x(-x+2)}{x \cdot x^3} = \frac{-x+2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1x^3 - (-x+2)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{x^2(2x-6)}{x^2 \cdot x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$f'''(x) = \frac{2x^4 - (2x-6)(4x^3)}{(x^4)^2} = \frac{-6x^4 - 24x^3}{x^8} = \frac{x^3(-6x-24)}{x^3 \cdot x^5} = \frac{-6x-24}{x^5}$$

### 7.) Extremstellen

$$f'(x) = \frac{-x+2}{x^3} = 0 \quad -x+2=0 \Rightarrow x=2$$

$$f''(2) = \frac{2(2)-6}{2^4} = \frac{-2}{2^4} < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$f(2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad H\left(2 \mid \frac{1}{4}\right)$$

### 8.) Wendestellen

$$f''(x) = \frac{2x-6}{x^4} = 0 \quad 2x-6=0 \Rightarrow x=3$$

$$f'''(3) = \frac{-6(3)-24}{(3)^5} = \frac{-18-24}{(3)^5} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=3$$

$$f(3) = \frac{3-1}{3^2} = \frac{2}{9} \quad W\left(3 \mid \frac{2}{9}\right)$$

### 9.) Schaubild

1. Polstelle(n) einzeichnen
2. Waagrechte Asymptote einzeichnen
3. Besondere Punkte einzeichnen

